פתרון מבחני עבר — אנליזה על יריעות

24 ביולי 2026

תוכן עניינים

1 מועד א' 2022 3
1.1 שאלה 1 3
1.2 שאלה 2 3
1.3 שאלה 3 4
1.4 שאלה 4 5
1.5 שאלה 5 5
1.6 שאלה 6 6
1.6.1 סעיף א' 6
1.6.2 סעיף ב' 6
2 מועד ב' 2022 7
2.1 שאלה 1 7
2.2 שאלה 2 7
2.3 שאלה 3 8
2.3.1 סעיף א' 8
2.3.2 סעיף ב' 8
2.4 שאלה 4 9
2.5 שאלה 5 9
3 מועד ב' 2023 10
3.1 שאלה 1 10
3.1.1 סעיף א' 10
3.1.2 סעיף ב' 10
3.2 שאלה 2 11
3.3 שאלה 3 11
3.3.1 סעיף א' 11
3.3.2 סעיפים ב' וג' 12
3.4 שאלה 4 12
3.5 שאלה 5 12
3.5.1 סעיף א' 12
3.5.2 סעיף ב' 12
3.6 שאלה 6 13
4 פתרון מבחן בלמזי (מניחה שמועד א' 2023) 14
4.1 שאלה 1 14
4.1.1 סעיף א' 14
4.1.2 סעיף ב' 14
4.2 שאלה 2 14
4.3 שאלה 3 15
4.3.1 סעיף א' 15
4.3.2 סעיף ב' 15
4.4 שאלה 4 15
4.5 שאלה 5 15
4.5.1 סעיף א' 15
4.5.2 סעיף ב' 16
4.5.3 סעיף ג' 16
4.6 שאלה 6 16

1 מועד א' 2022

1.1 שאלה 1

נחשב את האינטגרל המשטחי $\iint_\Sigma y^2 z \,\mathrm{d}\sigma$ כאשר Σ המשטח הנתון על־ידי

$$\Sigma = \left\{ (x,y,z) \mid x = \sqrt{3}y + \frac{\sqrt{5}}{2}z^2, -1 \le y \le 1, 0 \le z \le 1 \right\}$$

פתרון: נשים לב ש־x נתון פה בצורה סתומה ולכן לפי טענה שראינו אלמנט השטח נתון על־ידי

$$\mathrm{d}S = \sqrt{1 + (x_y)^2 + (x_z)^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \sqrt{4+5z^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

ואז כל שנשאר זה לחשב את האינטגרל הכפול

$$\iint_\Sigma y^2 z \,\mathrm{d}\sigma = \int_0^1 \int_{-1}^1 y^2 z\sqrt{4+5z^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^1 z\sqrt{4+5z^2}\left[\frac{y^3}{3}\right]_{y=-1}^{y=1}\mathrm{d}z = \frac{2}{3}\int_0^1 z\sqrt{4+5z^2}\,\mathrm{d}z$$

עם שיטת החלפת משתנה נחשב

$$\int z\sqrt{4+5z^2}\,\mathrm{d}z \underset{\substack{u=4+5z^2\\ \mathrm{d}u=10z\,\mathrm{d}z}}{=} \frac{1}{10}\int \sqrt{u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{10}\int u^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{10}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)u^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{15}(4+5z^2)^{\frac{3}{2}}$$

ואז

$$\iint_\Sigma y^2 z\,\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{15}(4+5)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{15}4^{\frac{3}{2}}$$

□

1.2 שאלה 2

נחשב את השטח הכלוא בתוך הצורה ∞ ששפתה מתוארת על־ידי המסילה

$$\gamma(t) = (\sin(t), \sin(t)\cos(t))$$

עבור $0 \le t \le 2\pi$.

פתרון: באופן טבעי התשובה תצא אפס אם נעשה את האינטגרל על כל המסילה כי הצורות מנוגדות ולכן יש אוריינטציה מנוגדת, אז מספיק לקחת רק את הקטע $t \in [0,\pi]$ עד שם זה מוגדר היטב ופשוט להכפיל ב־2. בתנאי משפט גרין ראינו את הטענה

$$\mathrm{Area}(\Omega) = \int_{\partial\Omega} x\,\mathrm{d}y = -\int_{\partial\Omega} y\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x$$

נסמן

$$\begin{aligned} x(t) &= \sin(t) \\ x'(t) &= \cos(t) \\ y(t) &= \sin(t)\cos(t) \\ y'(t) &= \cos^2(t) - \sin^2(t) = (x'(t))^2 - x(t)^2 \end{aligned}$$

אז מהנימוק לעיל נוותר על לחלק בחצי ונקבל

$$\int_{\partial\Omega} x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \sin(t)(\cos^2(t) - \sin^2(t)) - (\sin(t)\cos(t))\cos(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\partial\Omega} -\sin^3(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi -\sin^3(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^\pi (1-\cos^2(t))\sin(t)\,\mathrm{d}t \underset{\substack{u=\cos(t)\\ \mathrm{d}t=-\sin(t)\,\mathrm{d}t}}{=} \int_{-1}^1 u^2 - 1\,\mathrm{d}u = \left[\frac{u^3}{3} - u\right]_{u=-1}^{u=1} = \left[\frac{\cos^3(t)}{3} - \cos(t)\right]_{t=0}^{t=\pi} = -\frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$$

□

1.3 שאלה 3

נחשב את האינטגרל הקווי $\int_\gamma \vec{F}\vec{\mathrm{d}l}$ של השדה

$$F(x,y) = \left(x^2y + \sin(x) + y\sin(xy), \frac{x^3}{3} + x\sin(xy)\right)$$

לאורך המסילה

$$\gamma(t) = (t\cos(t), t\sin(t))$$

עבור $0 \le t \le 4\pi$

פתרון: ראשית התחום שלנו הוא תחום טוב (תחום מלא ללא חורים) ובתחום טוב משמר מקומית אם ורק אם משמר ואכן F משמר מקומית שכן לכל x מתקיים לו היה F משמר אז הוא בפרט היה משמר מקומית אבל ניתן לראות

$$x^2 + \sin(xy) + xy\cos(xy) = x^2 + \sin(xy) + xy\cos(xy)$$

מטענה שראינו נובע שמתקיים

$$\int_\gamma \vec{F}\vec{\mathrm{d}l} = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a))$$

כאשר φ היא פונקציית הפוטנציאל של $\vec{F}$ ובמקרה שלנו

$$\begin{aligned}
\varphi(x,y) &= \int \frac{x^3}{3} + x\sin(xy)\,\mathrm{d}y = \int \frac{x^3}{3}\,\mathrm{d}y + \int x\sin(xy)\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{x^3y}{3} + C_1 + \int x\sin(xy)\,\mathrm{d}y \\
&\underset{(\star)}{=} \frac{x^3y}{3} + C_1(x) + \int \sin(u)\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{x^3y}{3} + C_1(x) - \cos(xy) + C_2(x) \\
&= \frac{x^3y}{3} - \cos(xy) + C(x)
\end{aligned}$$

כאשר $(\star)$ זו ההחלפת משתנה $(u = xy,\ y = \frac{u}{x},\ \ \mathrm{d}u = x\,\mathrm{d}y$ נגזור

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{x^3y}{3} - \cos(xy) + C(x) = x^2y + y\sin(xy) + C'(x) = x^2y + y\sin(xy) + C'(x)$$

וממה ש־F נתונה נקבל ש־$C'(x) = \sin(x)$ כלומר $C(x) = -\cos(x)$ ולכן

$$\varphi(x,y) = \frac{x^3y}{3} - \cos(xy) - \cos(x) + K$$

ואז במקרה שלנו

$$\gamma(4\pi) = (4\pi, 0), \quad \gamma(\pi) = (-\pi, 0)$$

ולכן

$$\int_\gamma \vec{F}\vec{\mathrm{d}l} = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a)) = 0 - 0 - \cos(4\pi) + \cos(-\pi) = -2$$

$\square$

1.4 שאלה 4

נחשב את השטף של השדה

$$\vec{F}(x,y,z) = (-y, x, z)$$

דרך המשטח הסגור Σ כלפי חוץ כאשר

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \mid x^2+y^2 = \cos^2(z), -\frac{\pi}{2} \le z \le \frac{\pi}{2}\right\}$$

פתרון: שטף אומר ישר משפט הדיבירגנץ' ומתקיים $\operatorname{div}\vec{F} = 1$. נשים לב ש־$\Sigma$ סגור וחסומה (סגור כי נתון, חום כי $-\frac{\pi}{2} \le z \le \frac{\pi}{2}$ ו־$r = |\cos(z)|$ שחסום) אז ממשפט הדיבירגנץ'

$$\iint_{\Sigma} \langle F, \hat{n}\rangle \,\mathrm{d}S = \iiint_V \nabla F \,\mathrm{d}V = \iiint_V 1 \,\mathrm{d}V = \mathrm{Vol}(V)$$

אז אם נעבור לקורדינאטות גליליות, $-\frac{\pi}{2} \le z \le \frac{\pi}{2}$ ו־$r = \sqrt{x^2+y^2}$ מקיים $0 \le r \le |\cos(z)|$ נקבל (גם $\theta \in [0, 2\pi]$ כי אנחנו הולכים על כל הציר)

$$\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{|\cos(z)|} r \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\theta = \pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(z)\,\mathrm{d}z = \frac{\pi}{2}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1+\cos(2z)\,\mathrm{d}z = \frac{\pi}{2}\left([z]_{z=-\frac{\pi}{2}}^{z=\frac{\pi}{2}} + \left[\frac{\sin(2z)}{2}\right]_{z=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{\pi^2}{2}$$

□

1.5 שאלה 5

נחשב את האינטגרל הקווי $\oint_\gamma \vec{F}\vec{\mathrm{d}l}$ כאשר

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(\sin\left(e^{x^2}\right) + yz, x\cos(y), xz^2\right)$$

ו־γ היא המסילה המחברת בקטעים את הנקודות

$$(0,0,0) \to (0,2,0) \to (2,2,2) \to (2,0,2) \to (0,0,0)$$

פתרון: המסילה γ היא מסילה סגורה שמורכבת מקטעי קו ישר ולכן לפי משפט סטוקס האינטגרל הקווי על מסילה סגורה שווה לאינטגרל המשטחי של Curl של השדה על־פני כל המשטח S שהמסילה הזו היא השפה שלו, כלומר

$$\oint_\gamma \vec{F}\vec{\mathrm{d}l} = \iint_S \langle \mathrm{Curl}(F), \hat{n}\rangle \,\mathrm{d}s$$

נשים לב

$$\mathrm{Curl}(F) = (0-0, y-z^2, \cos(y)-z)$$

נשים לב שמניתוח של הנקודות $z = x$ תמיד ואז

$$r(u,v) = (u,v,u), 0 \le u \le 2, 0 \le v \le 2$$

אנחנו צריכים אלמנט נפח, אז נחשב את

$$\|r_u \times r_v\| = \|(1,0,1)\times(0,1,0)\| = \|(-1,0,1)\| = \sqrt{2}$$

כדי להשתמש במשפט סטוקס נחשב

$$\langle \mathrm{Curl}(F), \hat{n}\rangle = \cos(v) - u$$

ממשפט סטוקס נקבל

$$\oint_\gamma \vec{F}\vec{\mathrm{d}l} = \int_0^2\int_0^2 \cos(v) - u \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = 2\cos(v) - 2\,\mathrm{d}v = [2\sin(v) - 2v]_{v=0}^{v=2} = 2\sin(2) - 4$$

□

1.6 שאלה 6

תהיי $f(x,y)$ פונקציה שכל נגזורתיה מסדר 2 רציפות ונגדיר

$$\gamma_1(t) = (t, 0)$$
$$\gamma_2(t) = \left(t, \frac{t^2}{2}\right)$$
$$\gamma_3(t) = (\sin(t), 1 - \cos(t))$$

נגדיר

$$g_j(t) = f\big(\gamma_j(t)\big)$$

סעיף א'

לכל $1 \leq i < j \leq 3$ נקבע אם בהכרח מתקיים $g_i'(0) = g_j'(0)$.

הוכחה: נחשב ראשית נגזרות של $\gamma_i(t)$

$$\dot{\gamma}_1(t) = (1, 0),\ \ddot{\gamma}_1(t) = (0, 0)$$
$$\dot{\gamma}_2(t) = (1, t),\ \ddot{\gamma}_2(t) = (0, 1)$$
$$\dot{\gamma}_3(t) = (\cos(t), \sin(t)),\ \ddot{\gamma}_3(t) = (-\sin(t), \cos(t))$$

וניזכר בכלל שרשרת

$$D(g \circ f)_p = (Dg)_{f(p)} \cdot (Df)_p$$

נשים לב שלכל $i \in [3]$ מתקיים $D\gamma_j(0) = (1, 0)$ וגם $\gamma_j(0) = (0, 0)$ ולכן מכלל שרשרת הטענה נובעת. □

סעיף ב'

לכל $1 \leq i < j \leq 3$ נקבע אם בהכרח מתקיים $g_i''(0) = g_j''(0)$.

הוכחה: לא בהכרח כי

$$\ddot{\gamma}_3(0) = (0, 1) \neq \ddot{\gamma}_2(0) = (0, 1) \neq \ddot{\gamma}_1(0) = (0, 0)$$

וגם מתקיים

$$\dot{\gamma}_3(0) = (1, 0),\ \dot{\gamma}_2(0) = (1, 0)$$

ברור כי $g_1''(0) = 0_V$ אז מספיק שההרכבה לא קבועה אפס וכבר נוכל לקבל סתירה.
אז אין הכרח. □

2 מועד ב' 2022

2.1 שאלה 1

נחשב את השטח של המשטח

$$r(\theta,\varphi) = (\cos(\varphi)\sin(\theta), \sin(\varphi)\sin(\theta), \cos(\theta))$$
$$0 \le \theta \le 2\pi, \quad 0 \le \varphi \le \frac{\theta}{2}$$

פתרון: בקבוצה אמרו שצריך לשנות את התחום אבל אני אתעלם מזה. נחשב

$$r_\varphi = (-\sin(\varphi)\sin(\theta), \cos(\varphi)\sin(\theta), 0)$$
$$r_\theta = (\cos(\varphi)\cos(\theta), \sin(\varphi)\cos(\theta), -\sin(\theta))$$

אנחנו צריכים אלמנט נפח אז נחשב

$$\begin{aligned}
\|r_\theta \times r_\varphi\| &= \left\|\left(\sin^2(\theta)\cos(\varphi), \sin^2(\theta)\sin(\varphi), \cos^2(\varphi)\sin(\theta)\cos(\theta) + \sin^2(\varphi)\cos(\theta)\sin(\theta)\right)\right\| \\
&\underset{(\star)}{=} \left\|\left(\sin^2(\theta)\cos(\varphi), \sin^2(\theta)\sin(\varphi), \sin(\theta)\cos(\theta)\right)\right\| \\
&= \sqrt{\sin^4(\theta)\cos^2(\varphi) + \sin^4(\theta)\sin^2(\varphi) + \sin^2(\theta)\cos^2(\theta)} \\
&\underset{(\star\star)}{=} \sqrt{\sin^4(\theta)(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)) + \sin^2(\theta)\cos^2(\theta)} \\
&= \sqrt{\sin^2(\theta)(\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta))} \\
&\underset{(\star\star)}{=} |\sin(\theta)|
\end{aligned}$$

כאשר $(\star)$ זה כי

$$\cos^2(\varphi)\sin(\theta)\cos(\theta) + \sin^2(\varphi)\cos(\theta)\sin(\theta) = \cos(\theta)\sin(\theta)\left(\underbrace{\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)}_{=1}\right) = \cos(\theta)\sin(\theta)$$

ו־$(\star\star)$ מאותו השיקול ולבסוף

$$\mathrm{d}S = |\sin(\theta)|\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$$

אם נוותר על הערך המוחלט אז הכל יתקזז מה שלא בא לנו (או שבאמת צדקו בקבוצה) אז לא נוותר על הערך המוחלט ונשאר לחשב

$$A = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\theta}{2}} |\sin(\theta)|\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} |\sin(\theta)|\frac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi}\frac{\theta}{2}\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta - \int_{\pi}^{2\pi}\frac{\theta}{2}\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

מאינטגרציה בחלקים נקבל

$$\int \theta\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \sin(\theta) - \theta\cos(\theta)$$

ולכן

$$A = \frac{1}{2}\left([\sin(\theta) - \theta\cos(\theta)]_{\theta=0}^{\theta=\pi} - [\sin(\theta) - \theta\cos(\theta)]_{\theta=\pi}^{\theta=2\pi}\right) = 2\pi$$

□

2.2 שאלה 2

נחשב את האינטגרל הקווי $\int_\gamma \vec{F}\vec{\mathrm{d}l}$ כאשר

$$\vec{F}(x,y) = \left(e^{\sin(y)}, xe^{\sin(y)}\cos(y) + 6x\right)$$

ו־γ המסילה המחברת בין $(0,0)$ לבין $(1,0)$ על־ידי המסלול הבא: מהראשית הולכים ל־$(0,1)$ ואז ל־$(1,1)$ ואז יורדים ל־$(-1,0)$ והולכים על הגרף של מעגל היחידה עד $(1,0)$ (כלומר על $x^2+y^2=1$)

פתרון: נסמן $P = e^{\sin(y)}, Q = xe^{\sin(y)}\cos(y) + 6x$ ומתקיים

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \cos(y)e^{\sin(y)}$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x} = e^{\sin(y)}\cos(y) + 6$$

אז זה לא שדה משמר, ואי אפשר להשתמש במשפט סטוקס כי זו לא מסילה סגורה ולכן גם לא במשפט גרין.
אבל נניח שהמסילה הייתה סגורה, אז היה אפשר להשתמש במשפט גרין וממה שמצאנו לעיל

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 6$$

ולכן ממשפט גרין בהתאמה למסילות נקבל

$$\int_\gamma P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \int_\gamma \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_D 6\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 6\,\mathrm{Area}(D)$$

נניח ואנחנו סוגרים את המסילה ללולאה סגורה בזה שאנחנו מחברים בין $(1,0)$ לראשית עם קו ישר לראשית אז D היה ריבוע היחידה וחצי עיגול היחידה ואז

$$\mathrm{Area}(D) = 1 \cdot 1 + \frac{\pi}{2}$$

כלומר

$$\int_\gamma P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = 6\,\mathrm{Area}(D) = 6 + 3\pi$$

אז בעצם

$$\int_\gamma + \int_{\gamma_{\text{extra}}} = 6 + 3\pi$$

אז רק נוריד את האינטגרל שהוספנו.
על ציר ה־x מתקיים $y = 0$ ולכן $\mathrm{d}y = 0$ ועל ציר ה־x מתקיים

$$P(x,0) = e^{\sin(0)} = e^0 = 1$$
$$Q(x,0) = 6x$$

ואז

$$\int_{\gamma_{\text{extra}}} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \int_1^0 1\,\mathrm{d}x = -1$$

אז

$$\int_\gamma = 6 + 3\pi - \int_{\gamma_{\text{extra}}} = 7 + 3\pi$$

□

2.3 שאלה 3

יהי $\vec{F}(x,y) = (y^2 - y, (x^3 - x)\cos(y^2))$ ויש את γ המסילה שמקיפה את ריבוע היחידה.

סעיף א'

נחשב את $\oint_\gamma \vec{F}\vec{\mathrm{d}l}$.

פתרון: נסמן $P = y^2 - y, Q = (x^3 - x)\cos(y^2)$ ונרצה להשתמש במשפט גרין

$$\int_{\partial\Omega} \vec{F}\vec{\mathrm{d}l} = \int_\Omega \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_\Omega (3x^2 - 1)\cos(y^2) - 2y + 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

מלינאריות האינטגרל יש פה שני אינטגרלים כפולים שמחישוב זריז מפיקים 0. □

סעיף ב'

נקבע האם $\vec{F}$ שדה משמר ב־$\mathbb{R}^2$.

פתרון: $\mathbb{R}^2$ הוא תחום טוב ולכן הוא משמר אם ורק אם הוא משמר מקומית אז

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y - 1 \neq (3x^2 - 1)\cos(y^2) = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

אז לא משמר מקומית ובטח שלא משמר. □

2.4 שאלה 4

יהיו

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2=1, z \geq \sqrt{x^2+y^2}\right\}$$
$$\vec{F}(x,y,z) = \left(\frac{x^2}{2}+xy-4xz+\cos(z), -\frac{y^2}{2}-xy+x^2+z^3, 2z^2+x\right)$$

נחשב את השטף של $\vec{F}$ דרך Σ כלפי מעלה.

פתרון: ראשית אי־אפשר להשתמש ישירות במשפט הדיבירגנץ' כי Σ לא סגורה וחסומה ומתקיים $\operatorname{div} F = 0$ ונשים לב ש־Σ לא סגורה.
אם נשווה בין שתי המשוואות השפה של המשטח תהיה

$$z=\sqrt{x^2+y^2} \Longrightarrow z^2 = x^2+y^2 \Longrightarrow z^2+x^2+y^2=1 \Longleftrightarrow 2z^2=1 \Longleftrightarrow z=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

לקחנו שורש חיובי כי מדובר בגובה ולכן השפה היא מעגל ברדיוס $r=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ובגובה $z=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ולכן ניתן לחסום עם זה את Σ כי אם נגדיר

$$D = \left\{(x,y,z) \mid x^2+y^2 \leq 1\frac{1}{2}, z=\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$$

אז $\Sigma \cup D$ כולא בתוכו את הנפח שאנחנו רוצים ואז ממשפט הדיבירגנץ'

$$\iint_{\Sigma\cup D} \langle F, \hat{n}\rangle \,\mathrm{d}\sigma = \iiint_V \operatorname{div} F \,\mathrm{d}V = \iiint_V 0 \,\mathrm{d}V = 0 \Longrightarrow \iint_\Sigma \langle F, \hat{n}\rangle \,\mathrm{d}\sigma = -\iint_D \langle F, \hat{n}\rangle \,\mathrm{d}\sigma$$

הנורמל שמצביע החוצה מהנפח V הוא $\hat{n}_D = (0,0,1)$ ואז

$$\iint_D \langle F, (0,0,1)\rangle \,\mathrm{d}\sigma = \iint_D (2z^2+x)\,\mathrm{d}S \underset{z=\frac{1}{\sqrt{2}}}{=} \iint_D 1\,\mathrm{d}S + \iint_D x\,\mathrm{d}S$$

אבל D סימטרית לחלוטין סביב ציר ה־y ולכן האינטגרל של x עליה מתאפס ולכן

$$\iint_D 1\,\mathrm{d}S = \operatorname{Area}(D) = \pi r^2 = \frac{\pi}{2}$$

ולכן

$$\iint_\Sigma \langle F, \hat{n}\rangle \,\mathrm{d}\sigma = -\frac{\pi}{2}$$

□

2.5 שאלה 5

נחשב את האינטגרל הקווי $\oint_\gamma \vec{F}\mathrm{d}\vec{l}$ כאשר

$$\vec{F}(x,y,z) = (y, -2z, 4x)$$

ו־γ הוא מעגל ברדיוס 2 המוכל במישור $x+2y+3z=4$ ומגמתו בכיוון השעון כאשר מביטים מלמעלה.

פתרון: ראשית חישוב מניב $\operatorname{Curl} F = (2,-4,1)$.
וקטור הכיוון של המישור שעליו γ נמצאת הוא $(1,2,3)$ ולכן הוקטור הנורמל ליחידה פה הוא

$$\frac{(1,2,3)}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}} = \frac{(1,2,3)}{\sqrt{14}}$$

אנחנו צריכים את הנורמל כלפי מטה (כלל יד ימין) ולכן בעצם

$$\hat{n} = \frac{(-1,-2,-3)}{\sqrt{14}}$$

ממשפט סטוקס

$$\oint_\gamma \vec{F}\mathrm{d}\vec{l} = \iint_S \langle \operatorname{Curl} F, \hat{n}\rangle \,\mathrm{d}s = \iint_S \frac{9}{\sqrt{14}}\,\mathrm{d}S = \frac{9}{\sqrt{14}}\operatorname{Area}(S) \underset{(\star)}{=} \frac{36\pi}{\sqrt{14}}$$

$(\star)$ זה כי S הוא מעגל ברדיוס 2 ולכן $\operatorname{Area}(S) = \pi r^2 = 4\pi$. □

3 מועד ב' 2023

3.1 שאלה 1

סעיף א'

נגדיר את המושג יריעה חלקה k־מימדית.

פתרון: כזכור, יש 3 הגדרות

1. כקבוצת האפסים של פונקציה – נגיד ש־$M \subseteq \mathbb{R}^n$ היא יריעה חלקה k־מימדית אם לכל $p \in M$ קיימת סביבה (פתוחה) $p \in W \subseteq \mathbb{R}^n$ ו־$F : U \to \mathbb{R}^{n-k}$ חלקה המקיימת
   1. DF מדרגה מלאה
   2. $M \cap W = \{x \in W \mid F(x) = 0\}$
2. כגרף של פונקציה – נגיד ש־$M \subseteq \mathbb{R}^n$ היא יריעה חלקה k־מימדית אם לכל $p \in M$ קיימת $p \in W \subseteq \mathbb{R}^n$ סביבה פתוחה, $U \subseteq \mathbb{R}^k$ פתוחה ו־$f \in C^r\big(U, \mathbb{R}^{n-k}\big)$ כך שמתקיים $W \cap M = \Gamma(f)$
3. על־ידי פרמטריזציה – נגיד ש־$M \subseteq \mathbb{R}^n$ היא יריעה חלקה k־מימדית אם לכל $p \in M$ קיימת $p \in W$ סביבה פתוחה, $U \subseteq \mathbb{R}^k$ פתוחה ו־$\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ המקיימת
   1. $D\varphi$ מדרגה מלאה
   2. $\varphi(U) = W \cap M$
   3. $\varphi : U \to W \cap M$ הוא הומיאומורפיזם

$\square$

סעיף ב'

נוכיח בעזרת אחת ההגדרות לעיל שהקבוצה הבאה היא יריעה חלקה

$$M = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x\sin(z) = y\cos(z), x + y + z = 2\big\}$$

פתרון: נראה לפי ההגדרה של קבוצת האפסים של פונקציה (נראה לי זה הכי קל פה) כאשר $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ נתונה על־ידי

$$F(x, y, z) = (x\sin(z) - y\cos(z), x + y + z - 2)$$

ברור כי היא חלקה כי היא פולינומים / פולינומים טריגונומטריים והתנאי השני מתקיים ישירות כאשר בוחרים את $W = \mathbb{R}^3$ בצורה די ודאית אז רק נשאר להראות שהדיפרנציאל מדרגה מלאה

$$DF_{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(z) & -\cos(z) & x\cos(z) + y\cos(z) \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

כדי שזה יהיה מדרגה מלאה צריך להראות שאין תלות לינארית בין השורות ולכן מספיק שנניח שכל הערכים בשורה הראשונה שווים זה לזה ואז נראה איך זה גורם ל־M להתנהג

$$\sin(z) = -\cos(z) = x\cos(z) + y\cos(z)$$

אז מהשיוויון הראשון נקבל ש־$\tan(z) = -1$ ואז מהגדרת היריעה נקבל גם

$$x(-\cos(z)) = y\cos(z) \iff -x\cos(z) = y\cos(z) \iff x = -y$$

עכשיו $\sin(z) = x\cos(z) + y\sin(z)$ ולכן אם נציב $x = -y, \sin(z) = -\cos(z)$ נקבל

$$-\cos(z) = -y\cos(z) - y\cos(z) \iff -\cos(z) = -2y\cos(z)$$

מכיוון ש־$\cos(z) \neq 0$ כי $\tan(z) = -1$ נקבל

$$-1 = -2y \iff y = \frac{1}{2} \iff x = -\frac{1}{2}$$

אבל אז

$$\frac{-1}{2} + \frac{1}{2} + z = 2 \implies z = 2$$

אבל $\tan(2) \neq -1$ וזאת סתירה אז הדרגה מלאה וזו אכן יריעה. $\square$

3.2 שאלה 2

נחשב את

$$\int_{\partial\Omega} \frac{-y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x + \frac{x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y$$

כאשר $\Omega = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \frac{(x-2)^2}{16}+y^2<1\right\}$ ושפת אומגה מכוונת נגד כיוון השעון.

פתרון: אי־אפשר להשתמש במשפט גרין כי הראשית נקודה סינגולרית (ויחידה) והיא נמצאת ב־Ω.
נסמן

$$\vec{F}=(P,Q),\quad P:=\frac{-y}{x^2+y^2},\quad Q:=\frac{x}{x^2+y^2}$$

נגזור

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{-1(x^2+y^2)-(-y)2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{1(x^2+y^2)-2x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

בפרט נובע ש־F שדה משמר מקומית ואם **נניח** ש־$\Omega'=\Omega\setminus\{(0,0)\}$ (כאשר לא באמת הוצאנו רק את הראשית אלא סביבה קטנה דיו של הראשית) תחום שלא מכיל את הנקודה הסינגולרית, אז ממשפט גרין ישירות נקבל אם־כך $\iint_{\Omega'} 0\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0$.
יהי $\varepsilon>0$ וניקח $B(0,\varepsilon)$ כדור קטן דיו סביב הראשית כדי להוציא את הנקודה הסינגולרית עם הפרמטריזציה

$$x(t)=\varepsilon\cos(t),\quad y(t)=\varepsilon\sin(t),\quad t\in[0,2\pi]$$

ואז

$$\mathrm{d}x=-\varepsilon\sin(t)\,\mathrm{d}t,\quad \mathrm{d}y=\varepsilon\cos(t)\,\mathrm{d}t$$

והזהות הרגילה

$$x^2+y^2=\cos^2(t)+\sin^2(t)=1$$

ולכן

$$\begin{aligned}\int_{C_\varepsilon} P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y &= \int_0^{2\pi}\left(\left(-\frac{\varepsilon\sin(t)}{\varepsilon^2}\right)(-\varepsilon\sin(t))+\left(\frac{\varepsilon\cos(t)}{\varepsilon^2}\right)(\varepsilon\cos(t))\right)\mathrm{d}t\\ &= \int_0^{2\pi}(\sin^2(t)+\cos^2(t))\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^{2\pi}1\,\mathrm{d}t=2\pi\end{aligned}$$

מתקיים $\Omega=\Omega'\cup C_\varepsilon$ ולכן גם $\int_\Omega=\int_{\Omega'}+\int_{C_\varepsilon}$ אבל ראינו שזה אפס, אז $\int_{\Omega'}=2\pi$ (כי המעגל הוא עם כיוון השעון ולכן האוריינטציה שלו שלילית ביחס למה שמשפט גרין דורש אז צריך לתקן את זה) $\square$

3.3 שאלה 3

תהיי $\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^2$ מסילה סגורה, חלקה, לא קבועה המקיימת

$$\int_\gamma y^3\,\mathrm{d}x-x^3\,\mathrm{d}y=0$$

סעיף א'

נראה שלא קיימת קבוצה פתוחה, חלוקה וחסומה Ω כך ש־γ מתארת את $\partial\Omega$ במגמה חיובית.

פתרון: נניח שכן יש כזאת ונשתמש במשפט גרין. נסמן

$$\vec{F}(P,Q),\quad P=y^3,\quad Q=-x^3$$

נגזור

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=-3x^2,\quad \frac{\partial P}{\partial y}=3y^2$$

מהנתון וממשפט גרין נקבל

$$0=\int_{\partial\Omega} P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=\int_{\Omega}\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{\Omega}(-3x)-3y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-3\int_{\Omega}x^2+y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

אבל $f(x,y)=x^2+y^2$ היא פונקציה חיובית לכל $(x,y)\neq(0,0)$ ולכן האינטגרל שלה על כל קבוצה (לא ממידה אפס) הוא גדול מאפס וזאת סתירה. □

סעיפים ב' וג'

נמצא דוגמה למסילה γ המקיימת את הנתון ודוגמה למסילה γ המקיימת את הנתון ושהיא רגולרית.

פתרון: בשביל החלק הראשון מספיק הישר מ־$x=0$ ל־$x=1$ ובשביל החלק השני ניקח את צורת ה־∞ בקטע $[0,1]$ ומכיוון שהפונקציה שלנו אנטי־סימטרית ההרכבה של המסילה עליה תיתן אפס (וכמובן שרגולרית). □

3.4 שאלה 4

נחשבאת השטף של השדה $F(x,y,z)=\left(\tan y^3,\sin z,x^{2023}+1\right)$ דרך חצי הספירה

$$\Sigma=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x^2+y^2+z^2=1,z>0\right\}$$

פתרון: ראשית $\operatorname{div}F=0$ לכן ממשפט הדיבירגנץ $\int_\Sigma \operatorname{div}F=0$ ו־Σ היא חצי ספירה אז הנפח שלה הוא $\frac{2\pi}{3}$. נשים לב ש־Σ לא תחום סגור (אבל כן חסום) אז נבחר את $D=\left\{(x,y,0)\in\mathbb{R}^3\mid x^2+y^2\leq 1\right\}$ כי בעצם סגרנו את הספירה שיש לנו מלמטה וככה נקבל חצי כדור שלם ונוכל להשתמש במשפט הדיבירגנץ' כי

$$0=\int_\Sigma \operatorname{div}F\,\mathrm{d}\sigma=\iint_\Sigma\langle F,\hat{n}\rangle\,\mathrm{d}\sigma+\iint_D\langle F,\hat{n}\rangle\,\mathrm{d}\sigma\Longrightarrow\iint_\Sigma\langle F,\hat{n}\rangle\,\mathrm{d}\sigma=-\iint_D\langle F,\hat{n}\rangle\,\mathrm{d}\sigma$$

אז הנורמל שלנו הוא מי שמצביע החוצה ומאונך לציר ה־z ולכן נבחר $z=(0,0,-1)$ כי אנחנו רוצים לצאת מהספירה, ואם הוא יהיה חיובי אנחנו נסתכל לתוך הספירה. אפשר לחשב את הנורמל גם ידנית: אנחנו עם מעגל אז עדיף קורדינאטות קוטביות $x(r,\theta)=r\cos(\theta),y(r,\theta)=r\sin(\theta),z(r,\theta)=0$ עבור $r\in[0,1],\theta\in[0,2\pi]$ ואז

$$\begin{aligned}r_r(\cos(\theta),\sin(\theta),0)\\ r_\theta=(-r\sin(\theta),r\cos(\theta),0)\\ \|r_r\times r_\theta\|=\left\|(0,0,r\cos^2(\theta)+r\sin^2(\theta))\right\|=r\end{aligned}$$

ושוב בגלל הכיוון נובע שצריך את $(0,0-r)$ ובגלל שלקחנו וקטור יחידה זה $(0,0,-1)$ ונשאר לחשב

$$\iint_D\langle F,\hat{n}\rangle\,\mathrm{d}\sigma=-\iint_D x^{2023}+1\,\mathrm{d}\sigma$$

נשים לב ש־$f(x)=x^{2023}$ היא פונקציה אי־זוגית ולכן האינטגרל שלה על כל תחום סימטרי (ובפרט על הכדור שלנו) ייתן אפס אז חבל על המאמץ של האינטגרציה, אז רק נשאר

$$-\iint_D 1\,\mathrm{d}\sigma=(-1)\cdot\operatorname{Area}(D)=-\pi$$

אז

$$\iint_\Sigma\langle F,\hat{n}\rangle\,\mathrm{d}\sigma=\pi$$

□

3.5 שאלה 5

תהיי $\gamma:\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\to\mathbb{R}^3$ המסילה במישור xz הנתונה על־ידי

$$\gamma(t)=\left(R(\cos(2t))^{\frac{1}{2}}\sin(t),0,R(\cos(2t))^{\frac{1}{2}}\cos(t)\right)$$

ויהי Σ המשטח המתקבל על־ידי סיבוב המסילה γ סביב ציר ה־z (הערה: זה אומר שגובה ה־z נשאר זהה, אבל ציר ה־x הופך לרדיוס של מעגל במישור ה־xy, אני לא חושבת שאנחנו אמורים לדעת לענות על השאלה הזאת).

סעיף א'

פרמטריזציה עבור Σ.

פתרון: כדי לסובב סביב ציר ה־z כאשר $\theta\in[0,2\pi]$ נכפיל את הקורדינאטה ה־x־ית ב־$\cos(\theta)$ וכדי לקבל את הקורדינאטה ה־y־ית (שכרגע היא אפס), ניקח את הקורדינאטה ה־x־ית ונכפיל אותה ב־$\sin(\theta)$ וזה ייתן את הנדרש

$$\left(R(\cos(2t))^{\frac{1}{2}}\sin(t)\cos(\theta),R(\cos(2t))^{\frac{1}{2}}\sin(t)\sin(\theta),R(\cos(2t))^{\frac{1}{2}}\cos(t)\right)$$

□

סעיף ב'

נראה שאלמנט השטח של Σ מתלכד עם אלמנט שטח של ספירה.

הוכחה: נסמן $f(t) = R\sqrt{\cos(2t)}\sin(t)$ ואז

$$\sigma(t,\theta) = \left(f(t)\cos(\theta), f(t)\sin(\theta), R\sqrt{\cos(2t)}\cos(t)\right)$$

אנחנו רוצים $\mathrm{d}S = \|\sigma_t \times \sigma_\theta\|\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\theta$ אז נחשב כרגיל

$$\sigma_\theta = (-f(t)\sin(\theta), f(t)\cos(\theta), 0)$$
$$\sigma_t = (f'(t)\cos(\theta), f'(t)\sin(\theta), z'(t))$$

אם נפתח את המכפלה הוקטורית הזאת נקבל

$$\sigma_t \times \sigma_\theta = (-f(t)z'(t)\cos(\theta), -f(t)z'(t)\sin(\theta), f(t)f'(t))$$

יש פה מלא אלגברה שאני מסרבת לעשות. □

3.6 שאלה 6

תהיי $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ פתוחה, חלוקה וחסומה, $\Sigma = \partial\Omega$ עם נורמל כלפי חוץ ויהי $\vec{F}$ השדה $\vec{F}(x,y,z) = \left(z(x+y) - y^2, x(z-y), x^2+y^2\right)$.
יהי $\prod$ המישור $ax + by + cz = 1$.
נניח שהמישור $\prod$ מחלק את Σ לשני משטחים מכוונים Σ_+, Σ_- עם שפה. נמצא תנאים לא טריוויאלים על a, b, c שאינם תלויים ב־Ω לכך שהשטף של $\operatorname{Curl} F$ דרך כל אחד מהמשטחים Σ_+, Σ_- יתאפס.

פתרון: Wtf...
קודם כל $\operatorname{Curl} F = (2y - x, y - x, y)$ ונסמן $C = \Sigma_+ \cap \Sigma_-$, ממשפט סטוקס והאוריינטציה הנתונה

$$\iint_{\Sigma_+} \langle \operatorname{Curl} F, \hat{n}\rangle\,\mathrm{d}S = \oint_C F\,\mathrm{d}\sigma$$
$$\iint_{\Sigma_-} \langle \operatorname{Curl} F, \hat{n}\rangle\,\mathrm{d}S = -\oint_C F\,\mathrm{d}\sigma$$

C כולה ב־$ax + by + cz = 1$ ולכן אפשר למצוא נורמל $\hat{n} = \frac{(a,b,c)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.
אנחנו רוצים שזה ייתאפס לכל Ω ולכן חייב בהכרח להתקיים $\langle \operatorname{Curl} F, \hat{n}\rangle = 0$, אז המכפלה היא

$$(2y - x, y - x, y)\cdot(a,b,c) = (-a-b)x + (2a+b+c)y$$

(המכנה לא מעניין פה).
אם $c \neq 0$ אזי $z = \frac{1-ax-by}{c}$ וזה בעצם גורר כל צירוף לינארי כלשהו אבל מצד שני אנחנו דורשים

$$(-a-b)x + (2a+b+c)y = 0$$

וזו פונקציה לינארית ב־x, y והדרך היחידה שפונקציה לינארית תהיה אפס לכל x, y היא שכל המקדמים שלה יהיו אפס אז

$$-a-b = 0 \wedge 2a+b+c = 0 \Longrightarrow b = -a \Longrightarrow c = -a \Longrightarrow (a,b,c) = a(1,-1,-1)$$

אם $c = 0$ אז המישור הוא $ax + by = 1$ וכדי שיתקיימו התנאים לעיל צריך להיות λ כך שיתקיים

$$(-a-b)x + (2a+b)y = \lambda(ax+by-1) \Longrightarrow \lambda a = (-a-b)$$

כלומר אנחנו רוצים ש־$(-a-b)x + (2a+b)y$ תהיה אפס על כל המישור $ax + by = 1$ ומכאן נובע שאם שני אגפים שווים כפונקציות אז גם האיבר החופשי חייב להיות שווה ומכאן $\lambda = 0$ אבל אז

$$-a-b = 0 \wedge 2a+b = 0 \Longrightarrow a = b = 0$$

סתירה.
בסך־הכל תנאי הכרחי ומספיק הוא $\lambda(1,-1,-1)$ עבור $\lambda \neq 0$. □

4 פתרון מבחן בלמזי (מניחה שמועד א' 2023)

4.1 שאלה 1

סעיף א'

נגדיר את המושג יריעה חלקה k־מימדית ב־$\mathbb{R}^n$.

פתרון: ישנן 3 הגדרות ליריעות, ניתן את שלושתן

1. כאוסף נקודות האפס – נגיד ש־$M \subseteq \mathbb{R}^n$ היא יריעה חלקה k־מימדית אם לכל $p \in M$ יש $p \in W$ סביבה פתוחה ו־$F : U \to \mathbb{R}^{n-k}$ חלקה כך ש־DF מדרגה מלאה ו־$M \cap W = \{x \in W \mid F(x) = 0\}$
2. כגרף של פונקציה – נגיד ש־$M \subseteq \mathbb{R}^n$ היא יריעה חלקה k־מימדית אם לכל $p \in M$ יש $p \in W$ סביבה פתוחה, $U \subseteq \mathbb{R}^k$ פתוחה ו־$f \in C^r\left(U, \mathbb{R}^{n-k}\right)$ כך שמתקיים $M \cap W = \Gamma(f)$
3. נגיד ש־$M \subseteq \mathbb{R}^n$ היא יריעה חלקה k־מימדית אם לכל $p \in M$ יש $p \in W$ סביבה פתוחה ו־$U \subseteq \mathbb{R}^k$ פתוחה, $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ כך שמתקיים
   1. $D\varphi$ מדרגה מלאה
   2. $\varphi(U) = M \cap W$
   3. $\varphi : U \to M \cap W$ היא הומיאומורפיזם

□

סעיף ב'

נוכיח בעזרת אחת ההגדרות לעיל שהקבוצה הבאה היא יריעה חלקה

$$M = \left\{\left(s\sin(t), s\cos(t), s^2 + t\right) \mid s, t \in \mathbb{R}\right\}$$

פתרון: לא טבעי בכלל ואפילו די ארוך אבל מראים עם ההגדרה השלישית, נגדיר $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ על־ידי $f(t,s) = \left(s\sin(t), s\cos(t), t + s^2\right)$ והיא כמובן חלקה ב־$\mathbb{R}^2$ שפתוחה ואם נראה שהיא מדרגה מלאה אז ממשפט ההעתקה הפתוכה נקבל ש־f הומיאומורפיזם מקומי ולכן יריעה

$$DF(t,s) = \begin{pmatrix} \sin(t) & s\cos(t) \\ \cos(t) & -s\sin(t) \\ 2s & 1 \end{pmatrix}$$

נורא ארוך ומפרך אבל מראים עם המינורים.
כלומר ניקח מינור ראשון נניח

$$\det\begin{bmatrix} \sin(t) & s\cos(t) \\ \cos(t) & -s\sin(t) \end{bmatrix} = -s$$

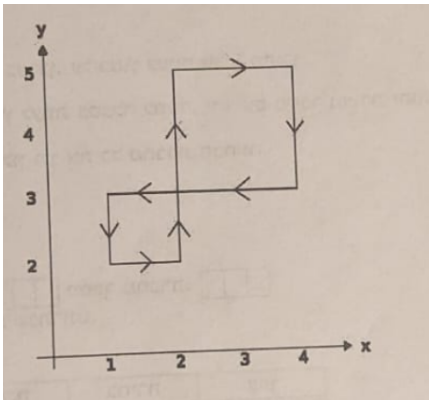
בגלל ש־s בתחום שלנו אז צריך לראות מה קורה כש־$s = 0$ (עבור $s \neq 0$ כבר מדרגה מלאה) אז נציב $s = 0$ ונקבל

$$\begin{pmatrix} \sin(t) & 0 \\ \cos(t) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

בבירור העמודות פה בלתי־תלויות ולכן המטריצה עדיין מדרגה מלאה. □

4.2 שאלה 2

נחשב את האינטגרל הקווי $\int_\gamma (x^2 - y)\,\mathrm{d}x + (y^2 + x)\,\mathrm{d}y$ כאשר γ היא בציור המצורף



פתרון: זו מסילה סגורה אז אפשר להשתמש במשפט גרין

$$\int_{\partial\Omega} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \int_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

אז אם נסמן $P = x^2 - y, Q = y^2 + x$ נקבל $\frac{\partial Q}{\partial x} = 1, \frac{\partial P}{\partial y} = -1$ ולכן

$$\int_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\,\mathrm{Area}(\Omega)$$

יש ריבוע יחידה ועוד ריבוע עם אורך קטע 2 אז

$$\mathrm{Area}(\Omega) = 2 \cdot 2 - 1 = 3$$

כשהמינוס זה בגלל שהאורינטצייה מבטלת את השטח בריבוע הקטן אז לבסוף התשובה היא 6. □

4.3 שאלה 3

תהיי $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ קבוצה פתוחה, חלקה וחסומה כך ש־$(0,0,0) \in \Omega$ ותהיי

$$u(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

סעיף א'

נחשב את $F = \nabla u$.

פתרון: מכללי גזירה

$$F = \nabla u = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(-x,-y,-z)$$

□

סעיף ב'

נחשב את השטף של F דרך $\partial\Omega$.

פתרון: זה אותו טריק ממקודם, בגלל ש־$(0,0,0) \in \Omega$ וזו נקודה סינגולרית גם של F וגם של u אז אנחנו צריכים לפרק את Ω להיות בסביבה קטנה מספיק בלי הראשית ובגלל ש־$\mathrm{div}\,F = 0$ מחישוב קצר אז נריץ פעם אחת את משפט הדיבירגנץ' על F על Ω בלי סביבה של הראשית ועוד משפט הדיבירגנץ' על סביבה קטנה של הראשית עם $\varepsilon > 0$ אבל אנחנו צריכים נורמל שחיצוני לכדורון (לא נתון המשטח בצורה שמאפשרת להוציא אותו) ולכן $\hat{n} = \frac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{(x,y,z)}{\varepsilon}$ לכדורון ואנחנו צריכים באוריינטציה הפוכה ולכן $-\hat{n}$ את האחד הפנימי קל יותר לחשב כי בכדור $B_\varepsilon(0)$ מתקיים $x^2+y^2+z^2 = \varepsilon^2$ ולכן

$$\langle F, -\hat{n}\rangle = \langle -\frac{(x,y,z)}{\varepsilon^3}, -\frac{(x,y,z)}{\varepsilon}\rangle = \frac{1}{\varepsilon^2}$$

ולבסוף

$$\iint_{\partial B(0,\varepsilon)} \langle F, -\hat{n}\rangle\,\mathrm{d}\sigma = \iint_{\partial B(0,\varepsilon)} \frac{1}{\varepsilon^2}\,\mathrm{d}S = \frac{4\pi\varepsilon^2}{\varepsilon^2} = 4\pi$$

אז השטף הרצוי הוא -4π. □

4.4 שאלה 4

אני לא יודעת לעשות.

4.5 שאלה 5

יהי Σ חלק הפרבולואיד שנתון על־ידי

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 2(x^2+y^2), 0 \le z < 1\}$$

סעיף א'

נחשב את השטח של Σ ונסמנו A.

פתרון: נשים ל שהמשטח נתון בצורה של גרף של פונקציה $z = f(x,y) = 2(x^2+y^2)$ ולכן את אלמנט השטח אפשר לקבל על־ידי

$$\sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sqrt{1+16x^2+16y^2}$$

נשים לב

$$0 \le z = 2(x^2+y^2) < 1 \iff x^2+y^2 < \frac{1}{2}$$

ולכן התחום שלנו הוא $D = \left\{(x,y) \mid x^2+y^2 < \frac{1}{2}\right\}$ ואם נעבור לקורדינאטות קוטביות $r^2 = x^2+y^2$ ולכן

$$A = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sqrt{1+16r^2}r \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = 2\pi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sqrt{1+16r^2}r\,\mathrm{d}r$$

נעשה חילוף משתנה $u = 1+16r^2$ ולכן $\mathrm{d}u = 32r\,\mathrm{d}r$ אז

$$\int \sqrt{1+16r^2}r\,\mathrm{d}r = \frac{1}{32}\int\sqrt{u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{32}\cdot\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{48}(1+16r^2)^{\frac{3}{2}}$$

אז נקבל

$$A = 2\pi\left[\frac{1}{48}(1+16r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{r=0}^{r=\frac{1}{\sqrt{2}}} = 2\pi\cdot\frac{13}{24} = \frac{13\pi}{12}$$

□

סעיף ב'

נחשב את $B = \iint_\Sigma z\,\mathrm{d}\,\mathrm{Vol}_2$.

פתרון: מתקיים $z = 2r^2$ ולכן

$$B = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(2r^2)\sqrt{1+16r^2}r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = 8\pi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} r^3\sqrt{1+16r^2}\,\mathrm{d}r$$

ועם אותה הצבה ממקודם כשזוכרים ש־$r^2 = \frac{u-1}{16}$ פותרים. □

סעיף ג'

נחשב את היחס $\frac{B}{A}$.

פתרון: אני חושבת שלא. □

4.6 שאלה 6

יהי

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(3x^2y^2z^2 + e^{xy}, 2x^3yz^2 - 2yz + e^{x^2}, 2x^3y^2z + x^2\right)$$

ו־$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ חלקה, יהי

$$\Sigma = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2\le 1, z = f(x,y)\right\}$$

עם נורמל $\hat{n}$ כלפי מעלה, צריך להראות ש־$\int_{\partial\Sigma}\vec{F}\vec{\mathrm{d}l}$ אינו תלוי בפונקציה f.

פתרון: Wtf... צריך להשתמש פה איכשהו במשפט סטוקס אז נתחיל ממה שקל

$$\operatorname{Curl} F = (2y, -2x, \text{some shit})$$

הג'מיני אומר להסתכל על הגליל

$$S = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 = 1, 0\le z\le f(x,y)\right\}$$

ואז ∂S מורכב משתי עקומות, $\partial\Sigma$ מכוונת נגד כיוון השעון (מגמה חיובית) והשפה התחתונה היא פשוט מעגל היחידה במישור $z=0$ עם כיוון השעון וממשפט סטוקס נקבל

$$\iint_S \langle \operatorname{Curl} F, \hat{n}\rangle\,\mathrm{d}S = \int_{\partial\Sigma} F\,\mathrm{d}l - \int_{C_0} F\,\mathrm{d}l$$

נשים לב שהנורמל החיצוני בשביל $x^2+y^2=1$ הוא $(x,y,0)$ (מצביע אופקית החוצה מהראשית) אבל אז $\langle \operatorname{Curl} F, (x,y,0)\rangle = 0$ ואז באמת לא היינו צריכים לחשב את האיכסה ובפרט יינבע $\iint_S 0\,\mathrm{d}S = 0$ ולכן

$$\int_{\partial\Sigma} F\,\mathrm{d}l = \int_{C_0} F\,\mathrm{d}l$$

וזה בידיוק אומר שזה לא תלוי ב־f. □